Практическая работа №5

ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ СИГНАЛОВ. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМЕНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Необходимость выполнения работы: теория корреляционного анализа сигналов широко используется в приемной части системы связи, в задачах обнаружения и выделения сигналов на фоне помех. Энергия и мощность сигналов и помех на входе приемника определяет вероятность возникновения ошибок.

Цель работы: Изучение теории корреляционного анализа детерминированных сигналов.

- **Основные расчётные соотношения**

Корреляционную (автокорреляционную) функцию действительного сигнала $s(t)$ с конечной энергией определяют по формуле:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt \qquad (3.1)$$

При этом $B(\tau)$ выражается в единицах энергии. Корреляционная функция $B(\tau)$ характеризует меру сходства сигнала $s(t)$ с его копией $s(t+\tau)$, смещенной на интервал $\pm\tau$.

Корреляционная функция (КФ) обладает следующими свойствами:

1. Значение КФ при $\tau = 0$ равно энергии сигнала:

$$B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = E$$

2. КФ является четной функцией:

$$B(-\tau) = B(\tau)$$

3. КФ имеет максимум при значении τ = 0:

$$B(0) \geq B(\tau) \qquad (3.2)$$

Коэффициент корреляции сигнала – нормированная КФ, отнесенная к энергии сигнала:

$$r(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)} \leq 1$$

При $\tau = 0$ значение коэффициента корреляции максимально и равно $r(0) = 1$.

Корреляционная зависимость. Функциональные зависимости можно выразить аналитически. Так, например, площадь круга зависит от радиуса ($S = \pi R^2$), ускорение F тела – от силы и массы (a = F/m_0).

Однако имеются зависимости, которые не слишком очевидны и не выражаются простыми и однозначными формулами.

Так, например, прослеживается связь между ростом людей и массой их тела, изменение погодных условий влияет на число доступных карманов в одежде, количество трудолюбия в учебе влияет на ***оценку за экзамен***, наконец наблюдается связь между здоровым питанием, занятием спортом и красивой фигурой т. д. Такая более сложная, чем функциональная, вероятностная зависимость является корреляционной (или просто – корреляцией). В этом случае изменение одной их величин влияет на среднее значение другой.

Если мы найдем преобразование Фурье корреляционной функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-j\omega t}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\,d\tau,$$

то после преобразований, получим

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-j\omega t}d\tau \tag{3.3}$$

и соответственно

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{3.4}$$

Прямое (3.3) и обратное (3.4) преобразования Фурье однозначно связывают корреляционную функцию $B(\tau)$ и энергетический спектр $W(\omega)$ детерминированного сигнала:

$$B(\tau) \leftrightarrow W(\omega)$$

Таким образом, корреляционная функция отображается в частотную область как энергетический спектр.

Взаимно корреляционная функция двух сигналов

Для оценки степени связи между двумя различными сигналами используют взаимно корреляционную функцию (ВКФ). ВКФ действительных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с конечной энергией определяют выражением

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) dt$$

В отличие от корреляционной функции взаимно корреляционная функция в общем случае не является четной и может достигать максимума при любом τ.

Пример вычисления функции взаимной корреляции в MathCad

$T1 := 5$

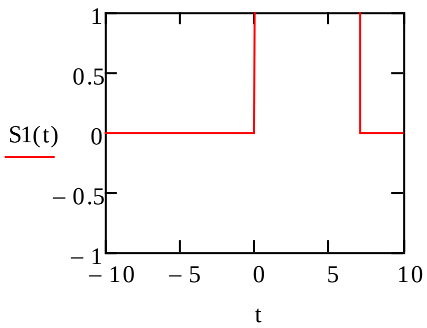
$U := 3$

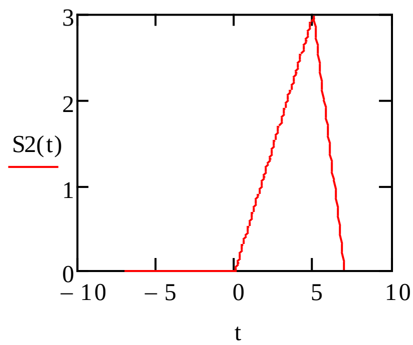
$T := 7$

$$S1(t) := \begin{cases} U & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S2(t) := \begin{cases} \dfrac{U \cdot t}{T1} & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq T1 \\ U - U \cdot \dfrac{(t - T1)}{(T - T1)} & \text{if } t \geq T1 \wedge t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

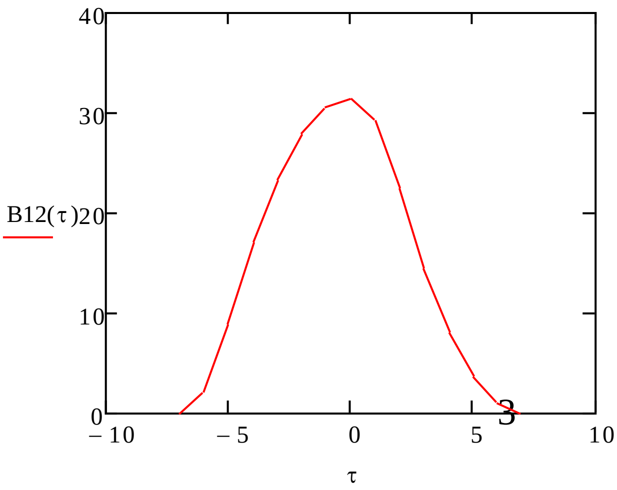
$t := -T, -0.99T .. T$





$$B12(\tau) := \int_{-T}^{T} S1(t) \cdot S2(t - \tau)\, dt$$

$\tau := -T .. T$



Задание

- 1 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 3$ *мс* и амплитудой $U_m = -2$ *В*. Вычислить также энергию и мощность сигнала.

$$E = \int_0^T s(t)^2 dt, \quad P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt$$

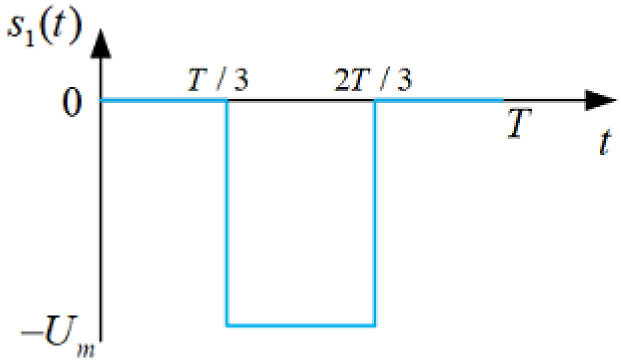


Рис 3.3 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №1)

- 2 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 5$ *мс*, и амплитудой $U_m = 4$ *В*. Вычислить также энергию и мощность сигнала.

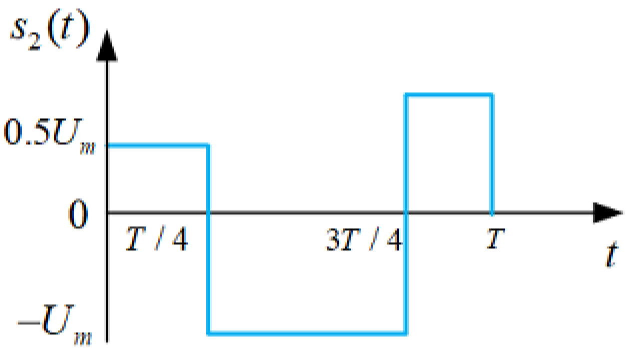


Рис 3.4 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №2)

- 3 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 6$ *мс* и амплитудой $U_m = 1$ *В*. Вычислить также энергию и мощность сигнала.

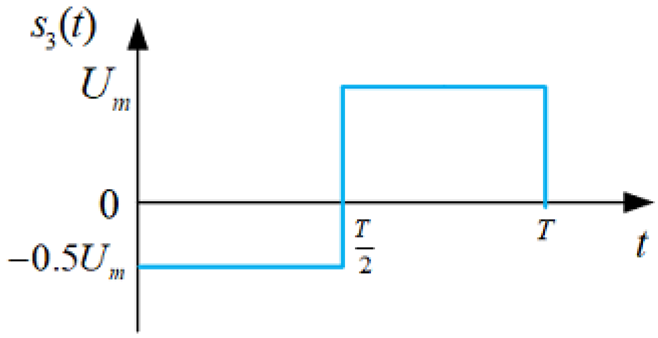


Рис 3.5 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №3)

- 4 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 8$ *мс* и амплитудой U_m = *3 В*. Вычислить также энергию и мощность сигнала.

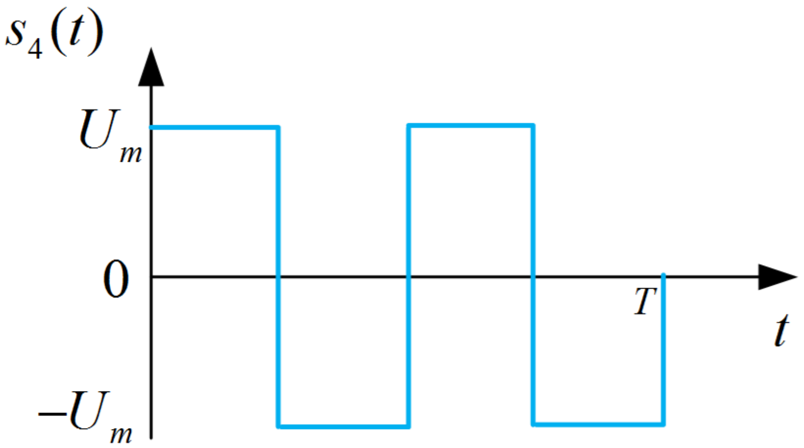


Рис 3.6 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №4)

Задача 2

- 1 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.7, если $\tau_И = 3$ *мс,* $\tau_1 = 2$ *мс* , U = *4 В*. Вычислить также взаимную энергию сигналов.

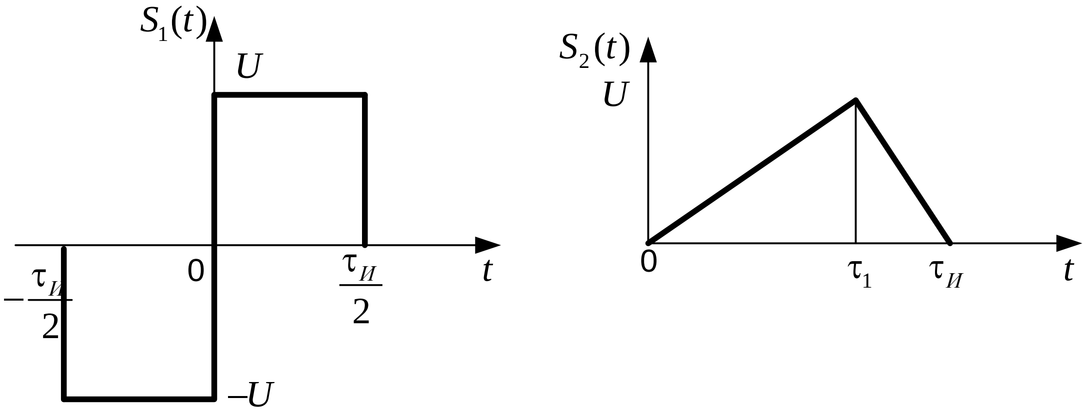


Рис. 3.7 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Примечание.

$$s1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \ge 0 \wedge t \le tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad s2(t) := \begin{cases} t & \text{if } t \ge 0 \wedge t \le tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 2 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.8, если $\tau_И = 7$ *мс,* $\tau_1 = 5$ *мс* , $U = 3$ *В*. Вычислить также взаимную энергию сигналов.

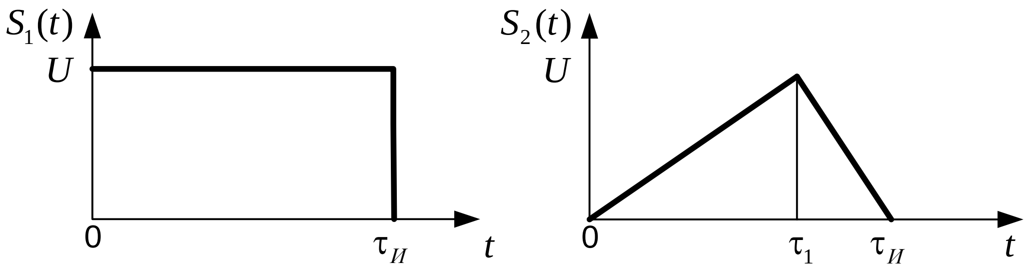


Рис. 3.8 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

- 3 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.9, если $\tau_И = 3$ *мс,* $U = 2$ *В*. Вычислить также взаимную энергию сигналов.

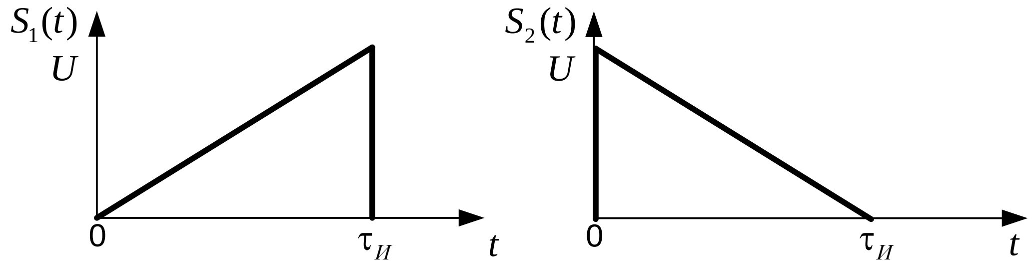


Рис. 3.9 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

- 4 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.10, если $\tau_И = 6$ *мс*, $U = 3$ *В*. Вычислить также взаимную энергию сигналов.

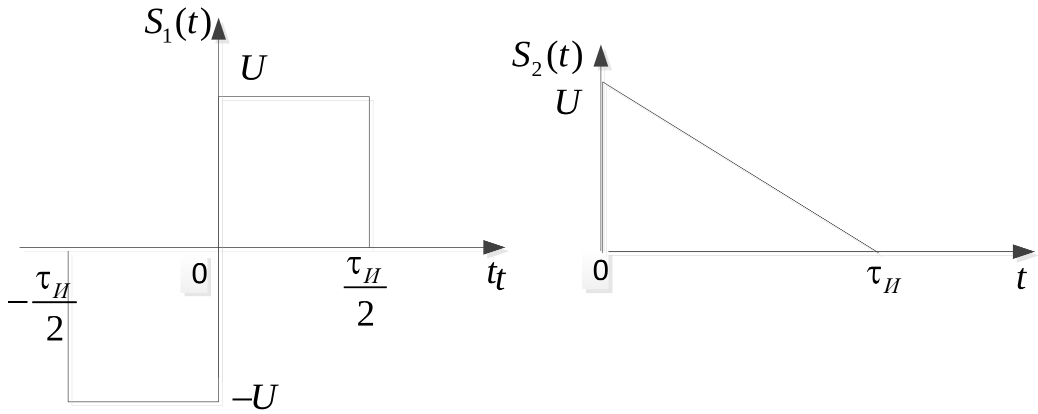


Рис. 3.10 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Что необходимо написать в выводе: при каком временном сдвиге τ два сигнала наиболее похожи друг на друга. При каком значении корреляционной функции степень взаимосвязи сигналов минимальна.