

Практическая работа №4

РАСЧЕТ СПЕКТРОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Необходимость выполнения работы: вычислив и изучив спектр сигнала, можно сделать вывод о требуемых параметрах канала связи для передачи сигнала без искажений.

Цель работы: Освоение методики расчета спектров детерминированных сигналов. Приобретение навыков спектрального анализа периодических и непериодических сигналов.

1.1. Спектральное представление периодических сигналов

К периодическим относятся сигналы, обладающие свойством:

$$S(t) = S(t + T)$$



где T – период сигнала.

Разложение периодического сигнала по базису тригонометрических функций – это разложение его в ряд Фурье. В качестве ортонормированного базиса рассматривают функции:

$$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t, \dots \quad (1.1)$$

или

$$\dots \exp(-j2\omega_1 t), \exp(-j\omega_1 t), 1, \exp(j\omega_1 t), \exp(j2\omega_1 t), \dots; \quad (1.2)$$

$\omega_1 = 2\pi/T$ – основная частота последовательности.

В случае (1.1) получаем тригонометрический ряд Фурье, в случае (1.2) – комплексный ряд Фурье.

Для тригонометрического **ряда Фурье**

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t),$$

где коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin n\omega_1 t dt.$$



Другая, эквивалентная формула записи тригонометрического ряда:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n)$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},$$

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n$$

В общем случае периодический сигнал содержит независимую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний, или гармоник, с частотами, кратными основной частоте последовательности.

Для четного сигнала $s(t) = s(-t)$, коэффициенты $a_n \neq 0, b_n = 0$.

Для нечетного сигнала $s(t) = -s(-t)$, коэффициенты $b_n \neq 0, a_n = 0$.

Графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала называется спектральной диаграммой. По горизонтальной оси откладываются частоты гармоник, а по вертикали – амплитуды (амплитудная диаграмма) или начальные фазы (фазовая диаграмма).

При разложении в комплексный ряд Фурье:

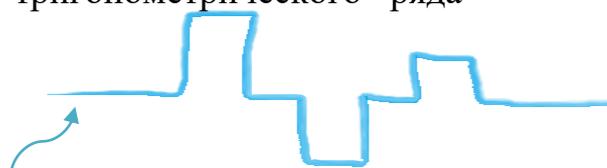
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jn\omega_1 t)$$

где $C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt$.

Спектр сигнала содержит компоненты на отрицательной полуоси частот, причём $C_{-n} = C_n^*$ (* обозначено комплексно-сопряжённое число).

Между коэффициентами комплексного и тригонометрического ряда существует связь:

$$A_n = 2|C_n|, \quad \varphi_n = \arg C_n$$



1.2. Спектральное представление непериодических сигналов

Для непериодических непрерывных сигналов справедливо **интегральное преобразование Фурье**:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Функция $G(j\omega)$ называется *спектральной плотностью сигнала* $s(t)$. Функции $G(j\omega)$ и $s(t)$ представляют собой две математические модели одного и того же физического процесса: одна из них отражает частотный состав сигнала, а другая описывает изменение сигнала с течением времени.

Спектральная плотность сигнала определяется с использованием прямого

преобразования Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Так как спектральная плотность является комплексной функцией, то определяют её модуль (амплитудный спектр) и аргумент (фазовый спектр). По форме амплитудного спектра можно судить о распределении энергии сигнала по частоте: энергия пропорциональна квадрату амплитуды спектральной плотности, то есть $|G(j\omega)|^2$ имеет физический смысл энергии, приходящейся на 1 Гц.

Если вам математические формулы кажутся инопланетной письменностью, откройте японский учебник, там формулы кажутся более понятными

周期信号的三角函数分解和合成 (傅立叶级数展开)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n2\pi f_0 t + b_n \sin n2\pi f_0 t) \quad (n=1,2,3,\dots)$$

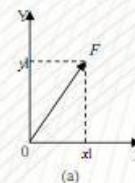
T: 信号周期
f0 = 1/T : 基频

傅里叶级数(正交函数的投影系数) ↓ $\{\cos(2\pi f_0 t), \sin(2\pi f_0 t)\}, i = 1,2,3,4,5,\dots$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_0 t) dt, n = 1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_0 t) dt, n = 1,2,3,\dots$$



• Примеры решения заданий

Задача 1.1

Разложить в ряд Фурье периодическую последовательность прямоугольных видеоимпульсов с известными параметрами T_w , T , A , чётную относительно $t = 0$ (рис. 1.1).

Решение

Сигнал можно представить выражением:

$$s(t) = \begin{cases} A, & -\frac{Tu}{2} \leq t \leq \frac{Tu}{2}, \\ 0, & \frac{Tu}{2} < t \leq T \end{cases}$$

Находим коэффициенты ряда:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-Tu/2}^{Tu/2} A \cdot \cos(n\omega_1 t) dt + \frac{2}{T} \int_{Tu/2}^T 0 \cdot \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 T_u}{2}.$$

Подставляем в формулу разные $n = 1, 2, 3, \dots$ и находим значения a_1, a_2, a_3, \dots

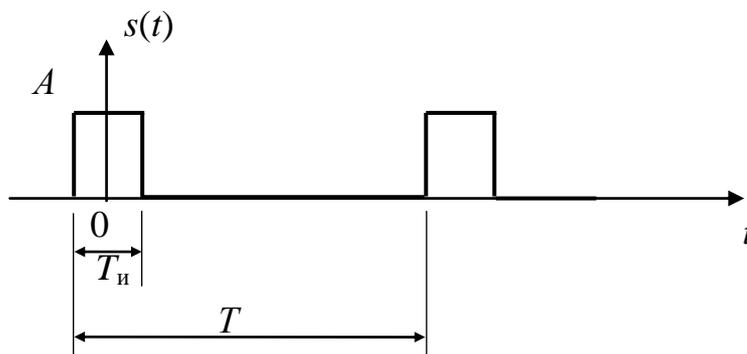


Рис. 1.1. - Периодическая последовательность импульсов, чётная относительно $t = 0$

Так как сигнал чётный, то $b_n = 0$.

На рис. 1.2 представлен амплитудный спектр последовательности импульсов при скважности $Q = 5$.

На рис. 1.3 изображён амплитудный спектр сигнала из примера 1.1 при разложении в комплексный ряд Фурье. Он построен с использованием связи между коэффициентами комплексного и тригонометрического рядов.

При $T=0.0125$ с, $f_1 = 1/0.0125 = 80$ Гц.

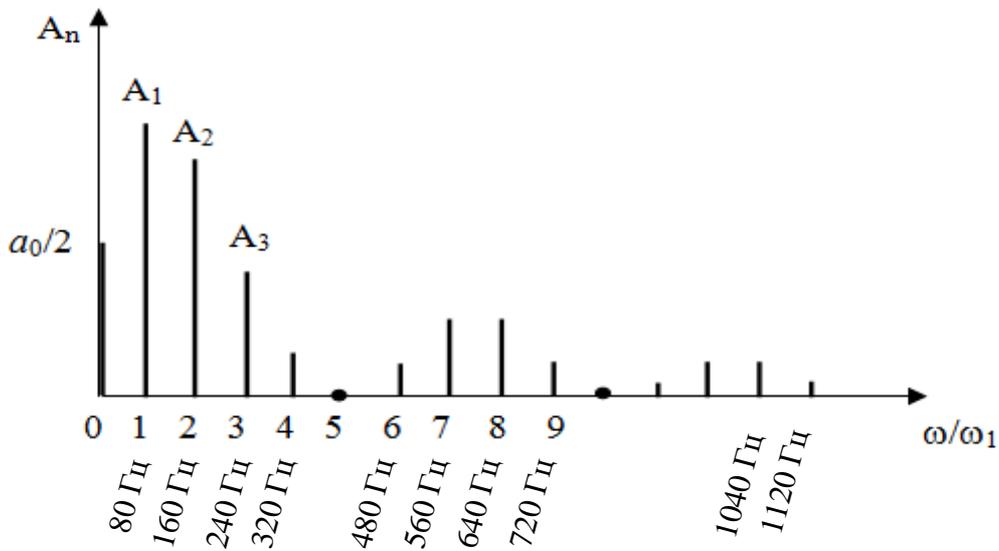


Рис. 1.2 - Амплитудный спектр последовательности импульсов при скважности $Q=5$, разложение в тригонометрический ряд Фурье

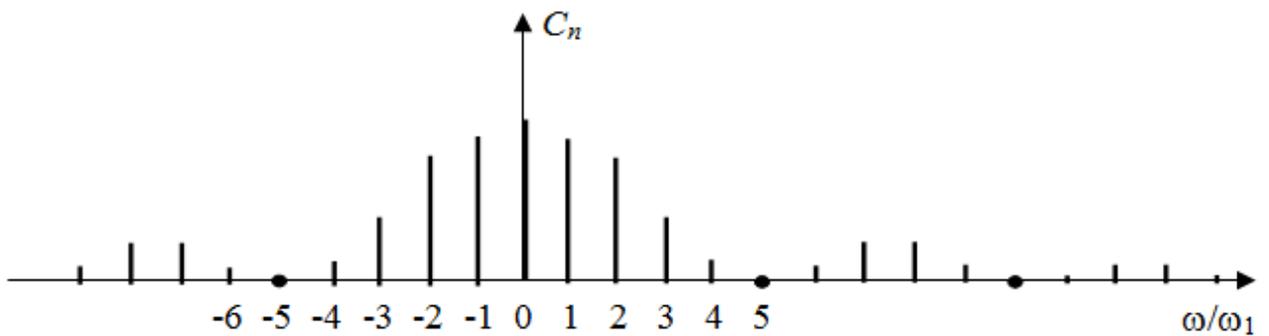


Рис. 1.3 - Амплитудный спектр последовательности импульсов при скважности $Q=5$, разложение в комплексный ряд Фурье

Задача 1.2

Определить спектральную плотность прямоугольного импульса длительностью T и амплитудой A .

Решение

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| < \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Спектральная плотность

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} (e^{-\frac{j\omega T}{2}} - e^{\frac{j\omega T}{2}}) =$$

$$= \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} = AT \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}.$$

Графики сигнала и его спектральной плотности изображены на рис. 1.4.

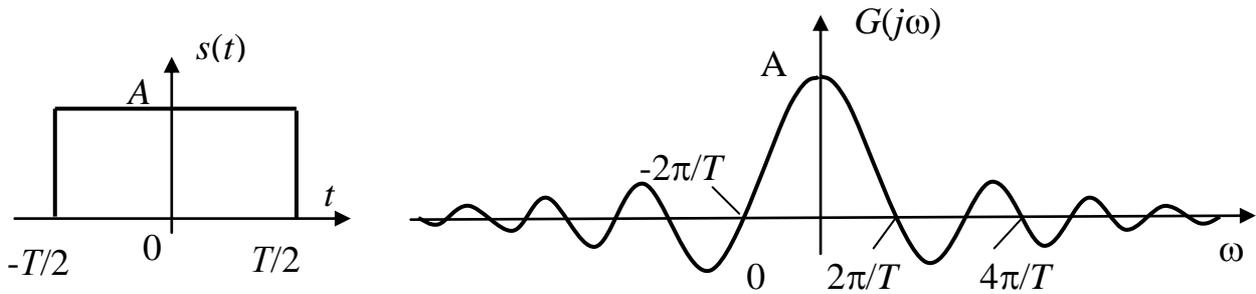


Рис. 1.4 - Прямоугольный импульс и его спектральная плотность

ЗАДАНИЯ

Задача №1

Найти и построить спектры периодических цифровых сигналов, которые будут передаваться по компьютерному кабелю и представляют собой электрические импульсы, изображённые на рис. 1.5. Для определения спектра – набора гармоник в составе сигнала, необходимо представить сигнал в виде ряда Фурье. На рис. 1.5 по варианту изображены цифровые сигналы во временной области в виде импульсов, амплитуда импульсов – величина напряжения $A = U_m$, значение можно выбрать любое из диапазона от 3 до 5 Вольт. Значение длительности тактового интервала T_b выбрать из диапазона от 0.001 до 0.01 мкс.

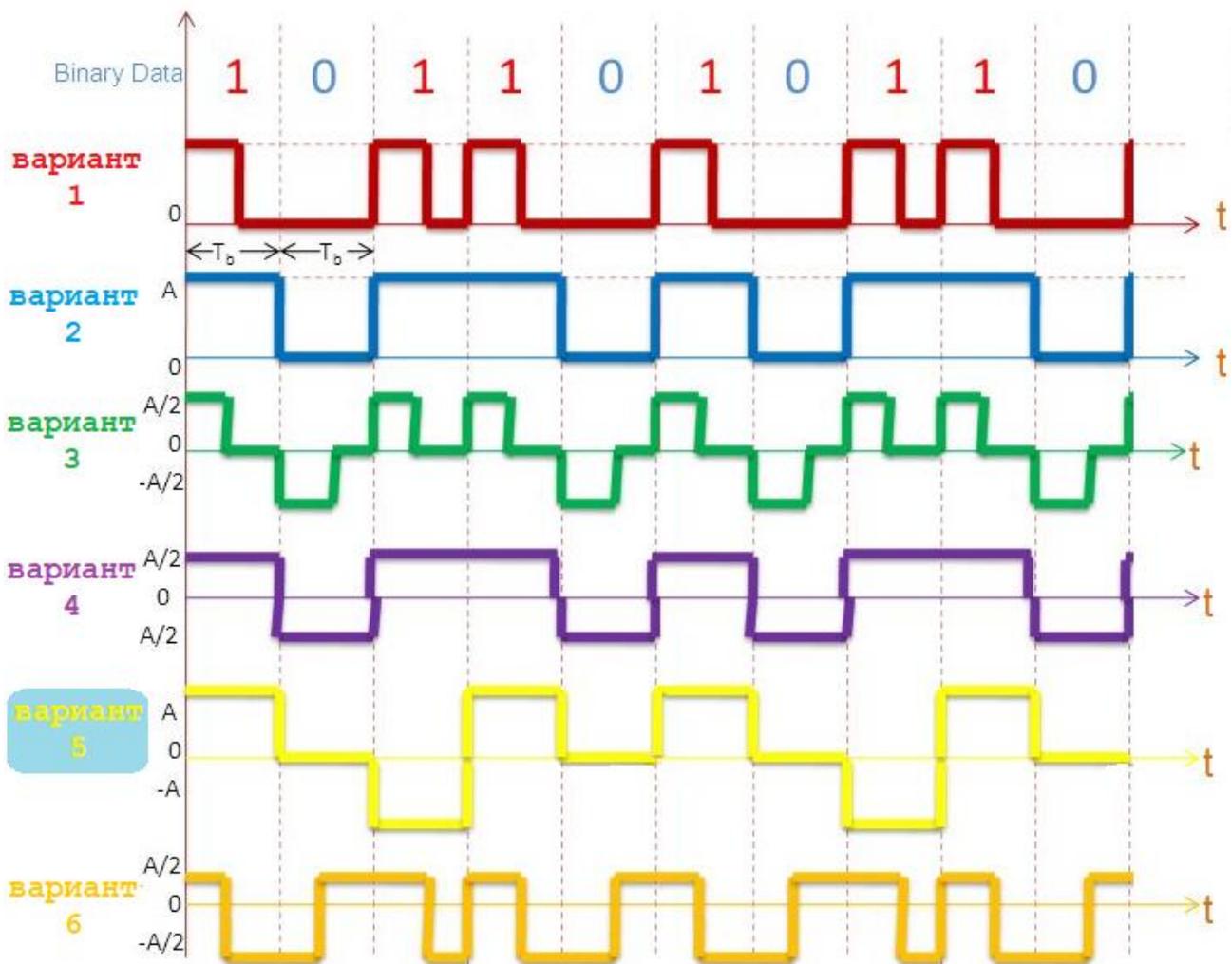


Рис. 1.5. - К задаче 1

Последовательность действий:

1) Найти по графику период сигнала T , определить сколько в нем

содержится интервалов T_b и исходя из этого найти значение T .

- 1) Записать на интервале T сигнал в виде формулы (функции $s(t)$)
- 2) Вычислить коэффициенты $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots, 10$, тригонометрического (вещественного) ряда Фурье.
- 3) Вычислить коэффициенты $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- 4) Построить амплитудный спектр сигнала, т.е. отобразить коэффициенты A_n в виде спектральных линий (см. пример рис. 1.2). По оси абсцисс указать значения содержащихся в сигнале частот в Гц.
- 5) Вычислить коэффициенты $|C_n|$ комплексного ряда Фурье
- 6) Построить амплитудный спектр сигнала при комплексном разложении в ряд Фурье (см. пример рис. 1.3). По оси абсцисс указать значения содержащихся в сигнале частот в Гц.

В качестве вывода оценить ширину спектра сигнала сделать вывод о возможности передачи сигнала через:

- a) витопарный кабель UTP cat. 1,
- b) коаксиальный кабель H+S K 01152-16¹,
- c) кабель LSZH UTP cat. 6a,
- d) оптическое волокно Corning® ClearCurve® OM5.

Если ширина спектра сигнала меньше полосы пропускания системы, то подсчитать сколько подобных сигналов можно передать по каждому кабелю.

Задача №2

Найти и построить спектральную плотность сигналов

Вариант	Тип сигнала	Параметры	
1	Сигнал с модуляцией PAM4	Амплитуды $A_n = n \cdot 0.5$, где $n = 1, 2, 3, 4$, нач. фазы радиоимпульсов $\varphi_0 = 0$, частота несущей $f_0 = 100$ ТГц, длительность 1 радиоимпульса 100 периодов несущей	1 цифра х значения максимума спектра $x.yu \cdot 10^n$
2	Сигнал с модуляцией BPSK	Амплитуда $A = 3$, нач. фазы радиоимпульсов: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$, частота несущей $f_0 = 2100$ МГц, длительность 1 радиоимпульса 100	1 цифра х значения максимума спектра $x.yu \cdot 10^n$

¹ <https://nkt.ru/katalog/komponenty-dlya-rea/provoda-i-kabeli/radiochastotnye-kabeli/gibkie-vch-kabeli-do-6-ggts/>

		периодов несущей	
3	Сигнал с модуляцией QAM-8	Амплитуды и нач. фазы радиоимпульсов: $A_1 = 0.5$, $\varphi_1 = \pi / 4$, $A_2 = 1$, $\varphi_2 = 3\pi / 4$, $A_3 = 0.5$, $\varphi_3 = 5\pi / 4$, частота несущей $f_0 = 1800$ МГц, длительность 1 радиоимпульса 100 периодов несущей	1 цифра х значения максимума спектра $x.yu \cdot 10^n$
4	Сигнал с модуляцией QPSK	Амплитуда $A = 4.5$, нач. фазы радиоимпульсов $\varphi_1 = \pi / 4$, $\varphi_2 = 3\pi / 4$, $\varphi_3 = 5\pi / 4$, $\varphi_4 = 7\pi / 4$ частота несущей $f_0 = 5.86$ ГГц, длительность 1 радиоимпульса 100 периодов несущей	1 цифра х значения максимума спектра $x.yu \cdot 10^n$

Последовательность действий:

- 1) Нарисовать сигнальное созвездие сигнала и его временную диаграмму
- 2) Записать сигнал в виде формулы (функции $s(t)$ как последовательности радиоимпульсов, имеющих длительность $100T$, где T – период несущего колебания)
- 3) В MathCad записать выражение для вычисления спектральной плотности сигнала через интегральное преобразование Фурье $G(\omega)$.
- 4) Построить график функции: зависимость модуля $|G(2\pi f)|$ от f .

Диапазон частот f задать от $f_0 - 2\Delta f$ до $f_0 + 2\Delta f$, где $\Delta f = \frac{1}{100T}$ – ширина спектра сигнала.

В качестве вывода оценить ширину спектра сигнала сделать вывод о возможности передачи сигнала через канал сети LoRaWAN, сети Wi-Fi 5 и сети 4G.

Если ширина спектра сигнала меньше полосы пропускания системы, то подсчитать сколько подобных сигналов можно передать по каждой системе.