Практическая работа №5

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМЕНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Необходимость выполнения работы: теория корреляционного анализа сигналов широко используется в приемной части системы связи, в задачах обнаружения и выделения сигналов на фоне помех.

Цель работы: Изучение теории корреляционного анализа детерминированных сигналов.

- **Основные расчётные соотношения**

Корреляционную (автокорреляционную) функцию действительного сигнала $s(t)$ с конечной энергией определяют по формуле:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt \qquad (3.1)$$

При этом $B(\tau)$ выражается в единицах энергии. Корреляционная функция $B(\tau)$ характеризует меру сходства сигнала $s(t)$ с его копией $s(t+\tau)$, смещенной на интервал $\pm\tau$.

Корреляционная функция (КФ) обладает следующими свойствами:

1. Значение КФ при $\tau = 0$ равно энергии сигнала:

$$B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = E$$

2. КФ является четной функцией:

$$B(-\tau) = B(\tau)$$

3. КФ имеет максимум при значении т = 0:

$$B(0) \geq B(\tau) \qquad (3.2)$$

Коэффициент корреляции сигнала – нормированная КФ, отнесенная к энергии сигнала:

$$r(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)} \leq 1$$

При τ = 0 значение коэффициента корреляции максимально и равно $r(0)$ = 1.

Корреляционная зависимость. Функциональные зависимости можно выразить аналитически. Так, например, площадь круга зависит от радиуса ($S = \pi R^2$), ускорение F тела – от силы и массы ($a = F/m_0$). Однако имеются зависимости, которые не слишком очевидны и не выражаются простыми и однозначными формулами. Так, например, прослеживается связь между ростом людей и массой их тела, изменение погодных условий влияет на число доступных карманов в одежде, количество трудолюбия в учебе влияет на оценку за экзамен, наконец наблюдается связь между здоровым питанием, занятием спортом и красивой фигурой т. д. Такая более сложная, чем функциональная, вероятностная зависимость является корреляционной (или просто – корреляцией). В этом случае изменение одной их величин влияет на среднее значение другой.

Если мы найдем преобразование Фурье корреляционной функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega t} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\, d\tau,$$

то после преобразований, получим

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega t} d\tau \qquad (3.3)$$

и соответственно

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (3.4)$$

Прямое (3.3) и обратное (3.4) преобразования Фурье однозначно связывают корреляционную функцию $B(\tau)$ и энергетический спектр $W(\omega)$ детерминированного сигнала:

$$B(\tau) \leftrightarrow W(\omega)$$

Таким образом, корреляционная функция отображается в частотную область как энергетический спектр.

Взаимно корреляционная функция двух сигналов

Для оценки степени связи между двумя различными сигналами используют взаимно корреляционную функцию (ВКФ). ВКФ действительных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с конечной энергией определяют выражением

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) dt$$

В отличие от корреляционной функции взаимно корреляционная функция в общем случае не является четной и может достигать максимума при любом τ.

- **Пример решения задач**

Найдите взаимную корреляцию $B_{12}(\tau)$ двух сигналов изображенных на рис. 5.6.

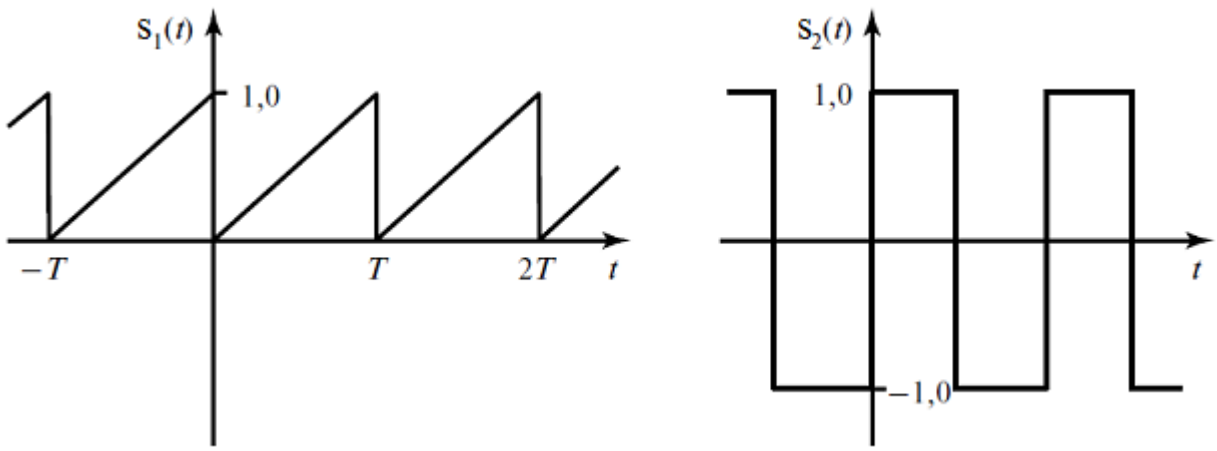

Рис. 3.1 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Требуемые сигналы легко записать аналитически, разделив их на прямолинейные сегменты. Это достаточно сделать для одного периода сигнала T, поскольку для данных сигналов функция $B_{12}(\tau)$ является периодической по τ с периодом T. Следовательно, для $0 \le t \le T$, $S_1(t) = t/T$ и для $0 \le t \le T/2$, $S_2(t) = 1, 0$, а для $T/2 \le t \le T$, $S_2(t) = -1, 0$. Далее требуется получить выражение для $B_{12}(\tau)$, т.е. $S_2(t)$ (прямоугольный сигнал) необходимо сместить вправо относительно $S_1(t)$.

Разобьем взаимную корреляцию на три сегмента с границами в точках $t = \tau$, $t = \tau + T/2$ и $t = T$. Далее получаем

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T S_1(t) S_2(t-\tau) dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{t}{T}(-1) dt + \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T/2} \frac{t}{T}(1) dt + \frac{1}{T}\int_{\tau+T/2}^{T} \frac{t}{T}(-1) dt =$$

$$= \frac{-1}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\tau} + \frac{1}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]\Bigg|_{\tau}^{\tau+T/2} - \frac{1}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]\Bigg|_{\tau+T/2}^{T}$$

$$B_{12}(\tau) = -\frac{1}{4} + \frac{\tau}{T}, \quad 0 \le \tau \le \frac{T}{2}. \tag{3.5}$$

Для $T/2 \le \tau \le T$, получаем

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^{\tau-T/2} \frac{t}{T}(1)dt + \frac{1}{T}\int_{\tau-T/2}^{\tau} \frac{t}{T}(-1)dt + \frac{1}{T}\int_{\tau}^{T} \frac{t}{T}(1)dt$$

$$B_{12}(\tau) = \frac{3}{4} - \frac{\tau}{T}, \quad \frac{T}{2} \le \tau \le T. \tag{3.6}$$

Подставляя $\tau = T/2$ в формулы (3.5) и (3.6), определяем, что в обоих случаях $B_{12}(\tau) = 1/4$, откуда следует, что функции согласованы правильно. График зависимости $B_{12}(\tau)$ от τ для $0 \le \tau \le T$ изображен на рис. 3.2.

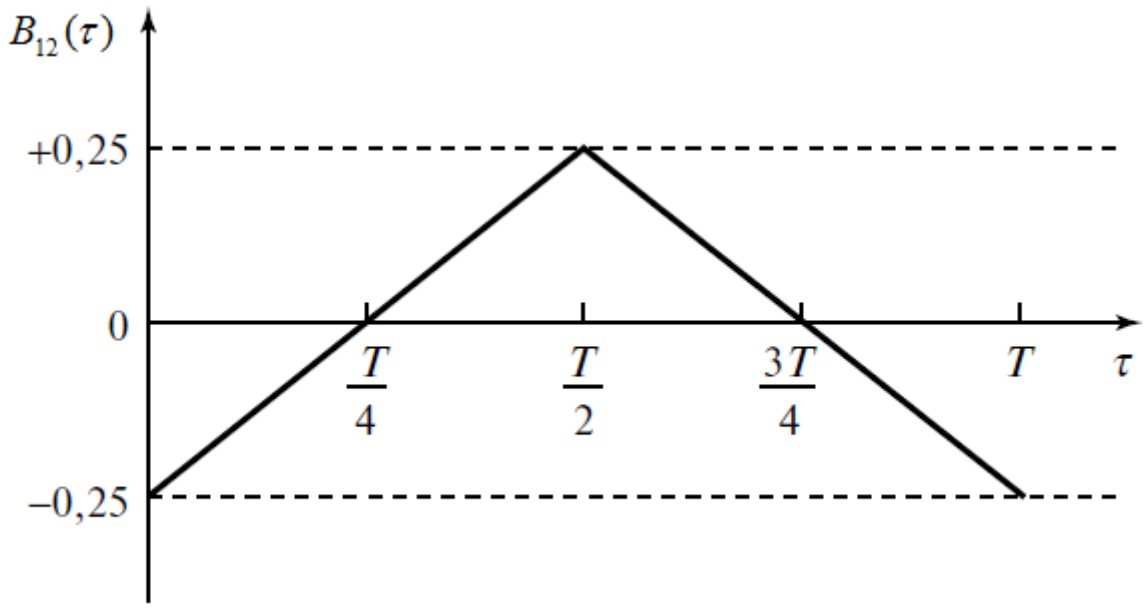

Рис. 3.2 – Взаимная корреляционная функция $B_{12}(\tau)$

Задание

- 1 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 3$ *мс* и амплитудой U_m = *-2 В*.

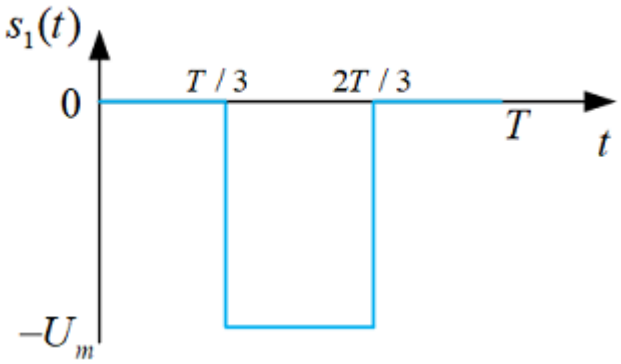

Рис 3.3 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №1)

- 2 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 5$ *мс,* и амплитудой $U_m = 4$ *В*.

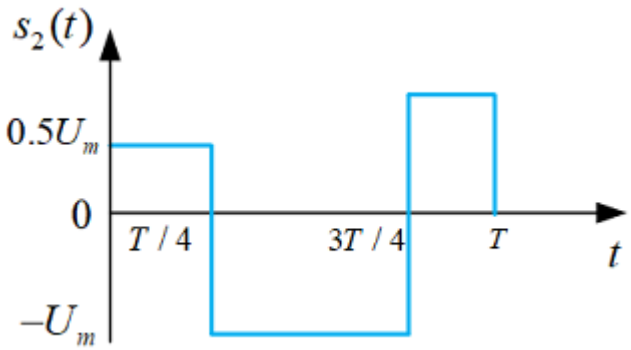

Рис 3.4 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №2)

- 3 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 6$ *мс* и амплитудой $U_m = 1$ *В*.

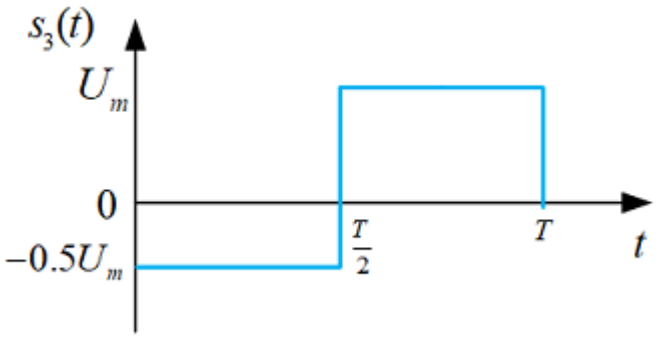

Рис 3.5 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №3)

- 4 Вариант

Построить автокорреляционную функцию сигнала длительностью $T = 8$ *мс* и амплитудой $U_m = 3$ *В*.

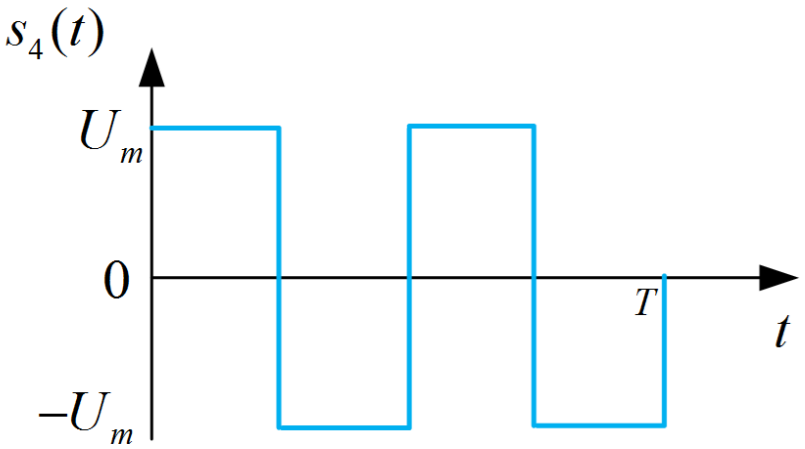

Рис 3.6 – Временная диаграмма сигнала (Вариант №4)

Задача 2

- 1 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.7, если $\tau_И = 3$ *мс*, $\tau_1 = 2$ *мс* , $U = 4$ *В*.

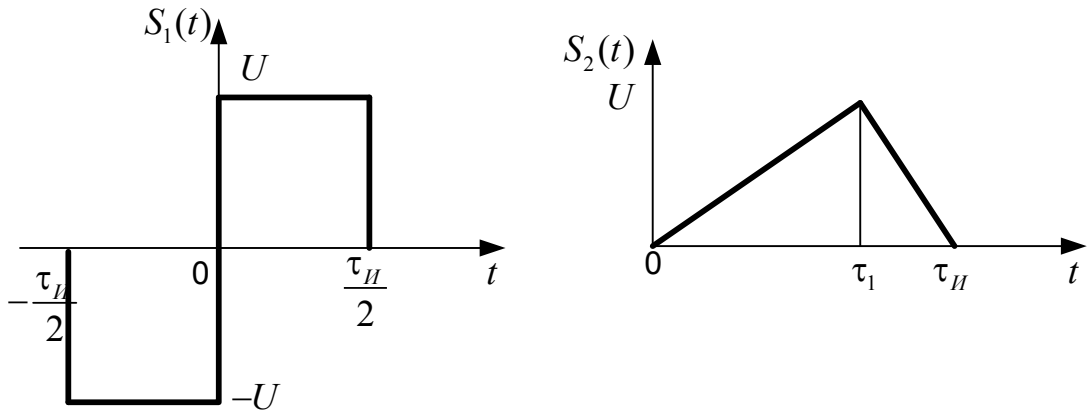

Рис. 3.7 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Примечание.

$$s1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad s2(t) := \begin{cases} t & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 2 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.8, если $\tau_И = 7$ *мс*, $\tau_1 = 5$ *мс* , $U = 3$ *В*.

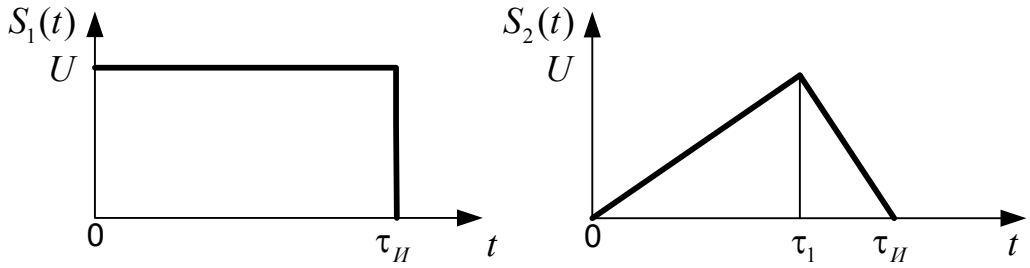

Рис. 3.8 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

- 3 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.9, если $\tau_И = 3$ *мс*, $U = 2$ *В*.

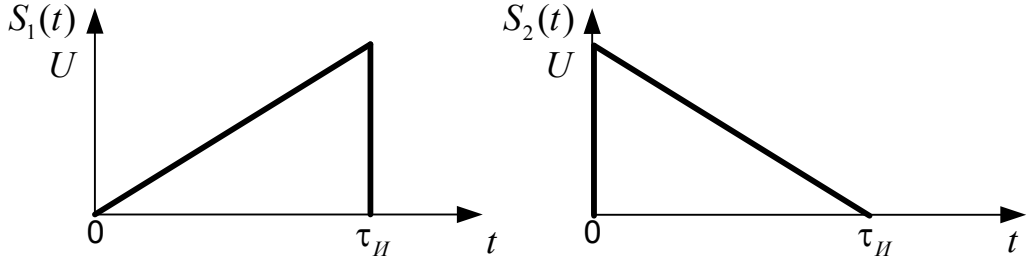

Рис. 3.9 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

- 4 Вариант

Построить взаимно корреляционную функцию сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, изображенных на рис 3.10, если $\tau_И = 6$ *мс*, $U = 3$ *В*.

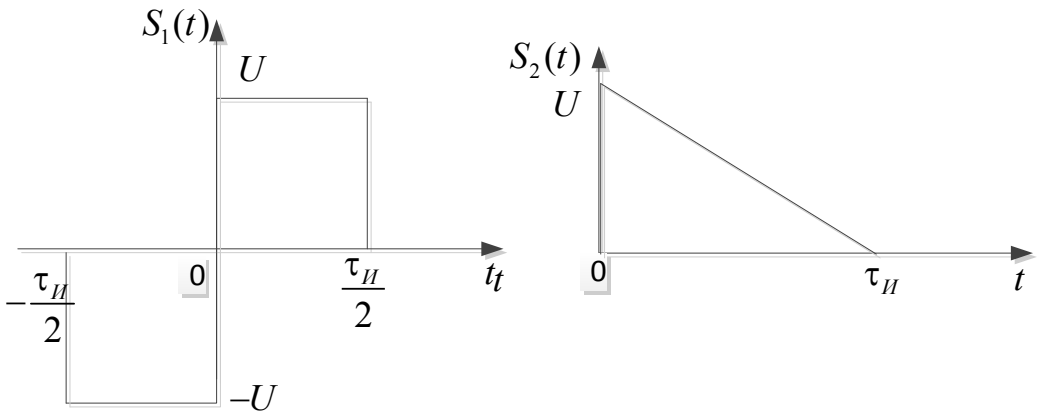

Рис. 3.10 – Временные диаграммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$

Что необходимо написать в выводе: при каком временном сдвиге τ два сигнала наиболее похожи друг на друга. При каком значении корреляционной функции степень взаимосвязи сигналов минимальна.